ANALIZA FUNKCJONALNA
LISTA 5

1. Pokazać, że w przestrzeni liniowej $B(X,Y)$, gdzie X,Y - unormowane przestrzenie liniowe, funkcjonał zadany wzorem
$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$$
spełnia aksjomaty normy, czyli, że jest to przestrzeń unormowana.

2. Pokazać, że następujące operatory liniowe $T : X \to Y$, gdzie X,Y są unormowanymi przestrzeniami liniowymi, są ograniczone i wyznaczyć ich normy:
   (a) $Tx = \lim_{n\to\infty} x_n$, gdzie $X = c$, $Y = \mathbb{C}$,
   (b) $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, gdzie $X = \ell^1$, $Y = \mathbb{C}$,
   (c) $(Tf)(x) = xf(x)$, gdzie $X = Y = C[0,1]$ z normą supremum (maksimum),
   (d) $(Tf)(x) = xf(x)$, gdzie $X = Y = L^p[0,1]$ dla $1 \le p \le \infty$,
   (e) $Tf = f'$, gdzie $X = C^1[0,1]$ z normą $\|f\| = |f(0)| + \max_{x\in[0,1]}|f'(x)|$ oraz $Y = C[0,1]$ z normą $\|f\| = \max_{x\in[0,1]}|f(x)|$,
   (f) $Tf = \int_E f(x)d\mu(x)$, gdzie $X = L^1(E,\mathcal{B},\mu)$, $Y = \mathbb{C}$,
   (g) $Tf = g$, gdzie $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, $X = Y = C[a,b]$, z normą supremum (maksimum).

3. Pokazać, że operator liniowy $T : C^1[0,1] \to C[0,1]$ zadany wzorem $T(f) = f'$, gdzie w obu przestrzeniach wzięto normę supremum (maksimum), nie jest ograniczony.

4. Wyznaczyć normy operatorów przesunięcia $T, S : X \to X$, zadanych wzorami
$$\begin{aligned} T(x_1,x_2,x_3,\ldots) &= (0,x_1,x_2,\ldots) \\ S(x_1,x_2,x_3,\ldots) &= (x_2,x_3,x_4,\ldots) \end{aligned}$$
w przypadku gdy $X = \ell^\infty$ oraz $X = \ell^2$. Wyznaczyć jądra i obrazy tych operatorów.

5. Niech $K : X \to X$ będzie operatorem całkowym postaci
$$(Kf)(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy.$$
Pokazać, że K jest ograniczony i wyznaczyć jego normę, jeżeli
   (a) $X = Y = C[0,1]$ z normą supremum (maksimum), $k \in C([0,1]^2)$,
   (b) $X = L^p[0,1]$, $Y = L^q[0,1]$, $k \in L^q([0,1]^2)$, $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$.

6. Pokazać, że norma operatorowa każdego operatora liniowego $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, gdzie w $\mathbb{C}^2$ jest norma Euklidesowa, spełnia nierówności

$$\max_{i,j}|a_{i,j}| \leq \|T\| \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|^2}$$

gdzie $a_{i,j}$ są współczynnikami we wzorach na współrzędne obrazu $Tx = y$, tzn. $y_i = \sum_j a_{i,j} x_j$.

7. Pokazać, że jeżeli $T \in L(X, Y)$, gdzie X, Y - unormowane przestrzenie liniowe, to T jest ograniczony wtedy i tylko wtedy gdy przekształca zbiory ograniczone w zbiory ograniczone.

8. Niech X będzie unormowaną przestrzenią liniową i niech Y będzie jej gęstą podprzestrzenią. Pokazać, że jeżeli $T \in B(Y, Z)$, gdzie Z jest przestrzenią Banacha, to istnieje jego jednoznaczne rozszerzenie $\widetilde{T} \in B(X, Z)$, tzn. $T(y) = \widetilde{T}(y)$ dla $y \in Y$, przy czym $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$. Podać przykład takiego T oraz $\widetilde{T}$.

9. Operator $T \in L(X, Y)$, gdzie X, Y są unormowanymi przestrzeniami liniowymi, jest izometrią, jeżeli $\|T(x)\| = \|x\|$ dla każdego $x \in X$. Pokazać, że każda izometria T jest injekcją oraz że $\|T\| = 1$. Podać przykład izometrii, która nie jest surjekcją.

R. Lenczewski